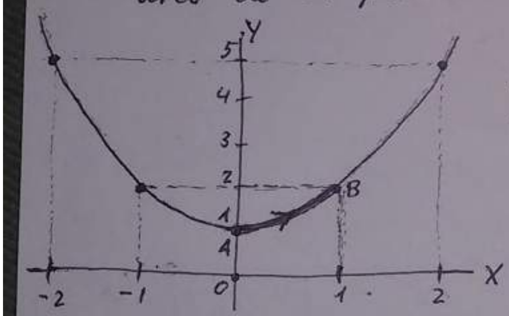
Examen de Física. Oposición Secundaria. Galicia 2003

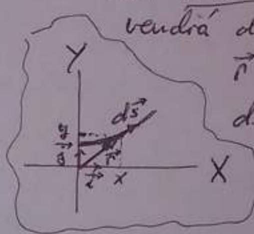
(1) Una partícula resulta atraída hacia el origen O (0,0) por una fuerza cuyo módulo es proporcional a la distancia r desde la partícula hasta el origen. Calcular el trabajo que se realiza al mover la partícula desde el punto A (0,1) hasta B(1,2) a lo largo de la trayectoria dada por $y = 1+x^2$ si el rozamiento entre la partícula y la trayectoria es μ.

• Solución: la partícula se mueve de A a B siguiendo un arco de la parábola $y = 1+x^2$



x	y
0	1
±1	2
±2	5

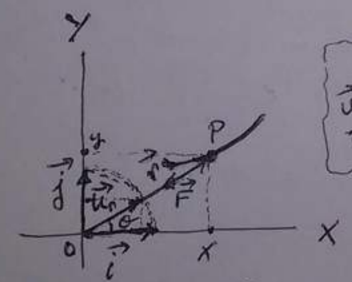
* El vector desplazamiento elemental vendrá dado:

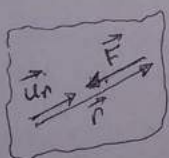


$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\left.\begin{array}{l} d\vec{s} = d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} \\ y = 1+x^2 \rightsquigarrow dy = 2x\,dx \end{array}\right\}$

$\therefore\ d\vec{s} = dx\,\vec{i} + 2x\,dx\,\vec{j}$





* La fuerza de atracción sobre la partícula vendrá dada por $\vec{F} = -K\,r\,\vec{u_r}$, con K = constante de proporcionalidad entre F y r; $\vec{u_r}$ es un vector unitario en la dirección [redacted] y sentido de $\vec{r}$, es decir, con sentido contrario a la fuerza de atracción, de ahí el signo negativo en la expresión de $\vec{F}$.

$\left.\begin{array}{l} \vec{u_r} = u_{r_x}\vec{i} + u_{r_y}\vec{j} \\ u_{r_x} = |\vec{u_r}|\cos\theta \\ u_{r_y} = |\vec{u_r}|\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \vec{u_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \text{sen}\,\theta\,\vec{j} \\ \cos\theta = \frac{x}{r}\ ;\ \text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u_r} = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{y}{r}\vec{j} = \frac{1}{r}(x\vec{i} + y\vec{j})$

Sustituyendo la expresión obtenida de $\vec{u_r}$ en la de $\vec{F}$:

$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = -K\,\cancel{r}\,\frac{1}{\cancel{r}}(x\vec{i} + y\vec{j}) \\ y = 1+x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F} = -K\left[x\vec{i} + (1+x^2)\vec{j}\right]$

* Ahora estamos en disposición de calcular el trabajo realizado por las fuerzas del campo para llevar la partícula de A a B:

$$W_{AB}^{F} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = -K\int_A^B \left[x\vec{i} + (1+x^2)\vec{j}\right]\cdot\left(dx\,\vec{i} + 2x\,dx\,\vec{j}\right) =$$

$$= -K\left(\int_0^1 x\,dx + 2\int_0^1 x\,dx + 2\int_0^1 x^3 dx\right) = -K\left(3\int_0^1 x\,dx + 2\int_0^1 x^3 dx\right) =$$

$$= -K\left(\frac{3x^2}{2} + \frac{\cancel{2}x^4}{\cancel{2}\cdot 2}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{K}{2}\left(3\cdot 1^2 + 1^4\right) \therefore \underline{\underline{W_{AB}^{F} = -2K}}$$

(Se trata de un campo de fuerzas conservativo: $F = -\frac{\partial E_p}{\partial s}$; $W_{AB}^{F} = -\Delta E_p = E_{p_A} - E_{p_B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s}$)

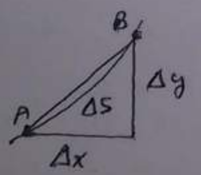
* El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento será:

$$W_{AB}^{roz} = \int_A^B \vec{F}_{roz}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \mu\, ds\, \underbrace{\cos 180^\circ}_{-1} = -\mu\int_A^B ds = -\mu\, s$$

La $\vec{F}_{ROZ}$ siempre se opone al movimiento de la partícula

* Hemos de calcular la longitud del arco de parábola (S) entre A y B. Un pequeño arco de una curva se puede aproximar por Pitágoras:

$$\Delta s \simeq \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]\Delta x^2} = \sqrt{\left[1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]}\cdot \Delta x$$

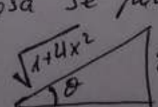


Llevando esta expresión al límite cuando A y B están infinitamente próximos tenemos: $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx \therefore$

$$\therefore ds = \sqrt{1+y'^2}\cdot dx \quad \therefore \int_A^B ds = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\, dx \therefore$$

En nuestro caso $y = 1 + x^2 \therefore y' = 2x$

$\therefore S = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\cdot dx$. ¡La cosa se pone fea compañeros! Pues cambio de variable trigonométrico:



$\therefore tg\theta = 2x \rightsquigarrow (2x)^2 = 4x^2 = tg^2\theta$ ⟶ $x = \frac{1}{2}tg\theta$. Teniendo en cuenta que la derivada de la tangente es la secante cuadrado:

$D(tg\theta) = D\left(\frac{sen\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{\cos^2\theta + sen^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$; podemos entonces escribir $dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$. Haciendo las sustituciones oportunas en la integral, teniendo en cuenta que los límites de integración cambian a:

$x = 0 \Rightarrow tg\theta = 0 \Rightarrow \theta = arctg\, 0 = 0$

$x = 1 \Rightarrow tg\theta = 2 \Rightarrow \theta = arctg\, 2 = 63{,}43494882^\circ = 1{,}107148718$ rad

$$S=\int_0^{1,10715}\underbrace{\sqrt{1+tg^2\theta}}\cdot\frac{1}{2}\sec^2\theta\cdot d\theta$$

$$1+tg^2\theta=1+\frac{sen^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta+sen^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta \quad \Bigg\}\therefore S=\frac{1}{2}\int_0^{1,10715}\sqrt{\sec^2\theta}\cdot\sec^2\theta\cdot d\theta$$

$\therefore S=\frac{1}{2}\int_0^{1,10715}\sec^3\theta\cdot d\theta$. Integramos por partes: $\int u\,dv=uv-\int v\,du \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=\sec\theta \longrightarrow du=\frac{sen\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\sec\theta\cdot tg\theta\cdot d\theta \\ dv=\sec^2\theta\cdot d\theta \longrightarrow v=\int\sec^2\theta\,d\theta=tg\theta \end{cases}$$

Ya hemos visto que la derivada de la tangente es la secante cuadrado por lo que la integral de la secante cuadrado es la tangente.
Entonces la integral de la secante cúbica buscada queda:

$$\int\sec^3\theta\cdot d\theta=\sec\theta\cdot tg\theta-\int\sec\theta\cdot tg^2\theta\cdot d\theta=\sec\theta\cdot tg\theta-\int\sec^3\theta\cdot d\theta+\int\sec\theta\cdot d\theta$$

$tg^2\theta=\sec^2\theta-1$

$$2\int\sec^3\theta\cdot d\theta=\sec\theta\cdot tg\theta+\int\sec\theta\cdot d\theta\ ;\ \int\sec^3\theta\cdot d\theta=\frac{1}{2}\left(\sec\theta\cdot tg\theta+\int\sec\theta\cdot d\theta\right)$$

Nos queda calcular la integral de la secante para lo cual multiplicamos y dividimos por la suma de la secante y la tangente:

$$\int\sec\theta\cdot d\theta=\int\frac{\sec\theta(\sec\theta+tg\theta)}{\sec\theta+tg\theta}\cdot d\theta=\int\frac{\sec^2\theta+\sec\theta\cdot tg\theta}{\sec\theta+tg\theta}\cdot d\theta$$

Caemos en la cuenta de que la derivada del denominador de esta fracción, es el numerador: $D(\sec\theta+tg\theta)=D(\sec\theta)+D(tg\theta)=\sec\theta\cdot tg\theta+\sec^2\theta$
Por lo tanto podemos aplicar: $D(\ln f)=\frac{f'}{f}$, luego $\int\frac{f'}{f}=\ln f$. En nuestro caso $f=\sec\theta+tg\theta$; $f'=\sec^2\theta+\sec\theta\cdot tg\theta$ y entonces la integral de la secante vale $\int\sec\theta\cdot d\theta=\ln|\sec\theta+tg\theta|+cte$ y la de la secante cúbica: $\int\sec^3\theta\cdot d\theta=\frac{1}{2}\left(\sec\theta\cdot tg\theta+\ln|\sec\theta+tg\theta|\right)+cte$. Y por fin:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\sec\theta\cdot tg\theta+\ln|\sec\theta+tg\theta|\right)\Big|_0^{1,10715}=\frac{1}{4}\left(2,236067977\cdot 2+\ln|2,236067977+2|-1\cdot 0-\ln|1+0|\right)=1,478942857\simeq 1,48$$

Entonces $W_{AB}^{roz}=-1,48\cdot\mu$. Así pues el trabajo que nosotros hemos de realizar para vencer las fuertas del campo y el rozamiento será la suma de los trabajos calculados pero con signos cambiados:

$$W_{AB} = -\left(W_{AB}^{F} + W_{AB}^{roz}\right) = -\left(-2K - 1{,}48\mu\right) \therefore \boxed{W_{AB} = 2K + 1{,}48\mu}$$

* Por último comentar que podemos aproximar el arco s por la cuerda $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}414213562$ lo que supone un error por defecto inferior al 5%, en ese caso: $\boxed{W_{AB} \simeq 2K + \mu\sqrt{2}}$