

-4-

PRÁCTICO GALICIA 1995

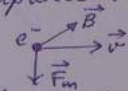
FÍSICA

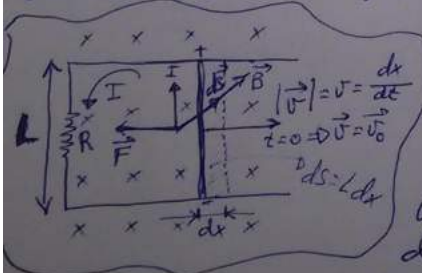
- ① Una barra metálica de masa "m" y longitud "L", se mueve sobre dos carriles metálicos paralelos, el circuito se completa con una resistencia de valor "R" paralela a la barra; todo ello está sometido a la acción de un campo magnético de intensidad "B" perpendicular y entrante en el plano del papel (ver figura).

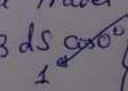


En el instante inicial ($t=0$) la barra se mueve con velocidad $\vec{v}=\vec{v}_0$, despreciando rozamientos y el incremento con el tiempo de la resistencia total del circuito, calcular:

a) Tiempo que transcurrirá hasta que la barra se para.

- Solución: Mientras la barra metálica esté moviéndose, sobre los electrodos (portadores de carga negativa) aparecerá una fuerza de Lorentz, magnética hacia abajo: $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ , por lo tanto se genera una corriente inducida I con sentido contrario a las agujas del reloj. Esto se puede deducir también utilizando la ley de Lenz, pues al moverse la barra de izquierda a derecha aumenta el flujo magnético a través de la espira, es decir, aumenta el número de líneas de inducción que la atraviesan hacia dentro del papel. Como contrapartida se genera una corriente inducida, I, de forma que saque líneas de inducción hacia fuera del papel, es decir, I ha de tener sentido contrario a las agujas del reloj. En un tiempo dt la barra se mueve horizontalmente, dx, a una velocidad $v = \frac{dx}{dt}$.



Entonces, el flujo a través del circuito aumenta en: $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS \cos 0^\circ$  $d\Phi = BL dx$
 $dS = L \cdot dx$

Utilizando la ley de inducción electromagnética de Faraday, calculamos la f.e.m. inducida en el circuito en valor absoluto: $|E| = \frac{d\Phi}{dt} = BL \frac{dx}{dt} = BLv$. Con la ley de Ohm calculamos la intensidad de corriente inducida: $E = I \cdot R$
 $I = \frac{E}{R} = \frac{BLv}{R}$. Como consecuencia aparece una fuerza magnética de Lorentz sobre la barra: $|\vec{F}| = |\vec{I}L \times \vec{B}| = ILB \sin 90^\circ = \frac{BLv}{R} LB = \frac{(BL)^2 v}{R}$
 \vec{F} es horizontal de izquierda a derecha por lo que frenará la barra.

con aceleración $a = -\frac{dv}{dt}$. Aplicando la 2ª ley de Newton:

$\vec{F} = m\vec{a} \therefore F = ma \therefore \frac{(BL)^2}{R} v = -m \frac{dv}{dt}$. Integramos la ecuación diferencial de variables separadas: $\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\int_0^t \frac{(BL)^2}{m \cdot R} dt$.

$$\therefore \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{(BL)^2}{mR} \cdot t \therefore \boxed{v = v_0 \cdot e^{-\frac{(BL)^2}{mR} t}}$$

Cuando $t=0 \Rightarrow v=v_0$. A partir del momento inicial la velocidad v disminuye exponencialmente pero la pregunta sobre el tiempo que transcurrirá hasta que se pare no tiene sentido porque parece que la barra se pare $\Rightarrow v=0$, el tiempo debe tender al infinito.

Cuando $t \rightarrow \infty \Rightarrow v = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{v_0}{e^{\frac{(BL)^2}{mR} t}} \right] = 0$. En otras palabras,

siguiendo estrictamente las condiciones teóricas expuestas en el enunciado, ¡la BARRA NO PARARÁ NUNCA! Ahora bien, sí tendría sentido establecer una cota superior a la distancia recorrida, x , por la barra, desde $t=0$ con $v=v_0$ hasta $t \rightarrow \infty$ con $v=0$:

$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot e^{-\frac{(BL)^2}{mR} t}$, separando variables e integrando:

$\int_0^x dx = v_0 \cdot \int_0^t e^{-\frac{(BL)^2}{mR} t} dt$. Hacemos el siguiente cambio de variable:

$u = -\frac{(BL)^2}{mR} t \therefore du = -\frac{(BL)^2}{mR} dt \therefore dt = -\frac{mR}{(BL)^2} du$. Entonces la integración

queda: ~~$x = \frac{mR v_0}{(BL)^2} \int_0^{\frac{(BL)^2}{mR} t} e^{-u} du$~~ $x = -\frac{mR v_0}{(BL)^2} \int_0^{-\frac{(BL)^2}{mR} t} e^u du \therefore \boxed{x = \frac{mR v_0}{(BL)^2} \left[1 - e^{-\frac{(BL)^2}{mR} t} \right]}$

Haciendo tender $t \rightarrow \infty$ podemos establecer un límite superior inaccesible para la distancia recorrida por la barra:

$$x = x_{\text{máx}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{mR v_0}{(BL)^2} \left[1 - e^{-\frac{(BL)^2}{mR} t} \right] \right\} \therefore \boxed{x_{\text{máx}} = \frac{mR v_0}{(BL)^2}}$$

No obstante, pienso que la barra se aproximará mucho a $x_{\text{máx}}$ en un tiempo finito prudencial puesto que v disminuye exponencialmente con el tiempo.

- 2) En un aparato para determinar la carga elemental e , por el procedimiento de Millikan, una gotita de aceite, en ausencia de campo eléctrico, desciende un milímetro en $t = 40,2\text{s}$ y queda quieta cuando se le aplica un campo de $8,784 \cdot 10^3 \text{ V/m}$. Con cuántos electrones está cargada la gota? La viscosidad del aire es $1,80 \cdot 10^{-5} \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$, la densidad del aceite es $0,824 \text{ g/cm}^3$ y la del aire $1,29 \text{ g/l}$.

Solución:

* En ausencia de tensión entre las placas del condensador, no hay campo eléctrico. La gota se encuentra en caída libre y asumimos que ya ha alcanzado la velocidad límite constante $v = \frac{s}{t}$. Por lo tanto, podemos realizar el siguiente balance de fuerzas:

$$\begin{aligned} & \vec{E} \uparrow \vec{F}_R \uparrow \vec{F}_{\text{elec}} = 0 \quad \left\{ \eta = 1,80 \cdot 10^{-5} \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2} \right. \\ & m \downarrow \quad \left. \begin{aligned} v = \frac{s}{t} = \text{cte} \\ s = 1 \text{ mm} = 0,001 \text{ m} \\ t = 40,2 \text{ s} \end{aligned} \right\} \\ & \rho_{\text{ac}} = 0,824 \text{ g/cm}^3 = 824 \text{ kg/m}^3 \\ & \rho_{\text{ai}} = 1,29 \text{ g/L} = 1,29 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

$\vec{v} = \text{cte} \Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \Sigma \vec{F} = 0$

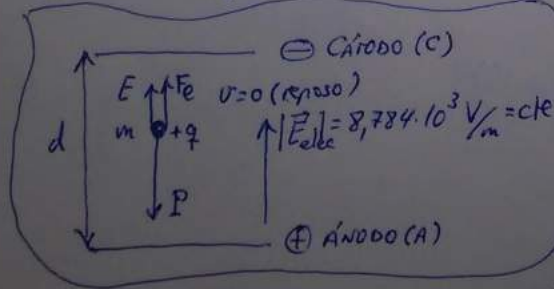
$\therefore \vec{P} = \vec{F}_R + \vec{F}_{\text{elec}}$
 \uparrow empuje sobre la gota debido al volumen de aire desalojado.
 \uparrow fricción de la gota con el air.

$$\begin{aligned} P &= m_{\text{ac}} g = \rho_{\text{ac}} \cdot V \cdot g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{ac}} g \\ \text{Ley de Stokes: } F_R &= 6 \pi r \eta v = 6 \pi r \eta \frac{s}{t} \\ \text{Principio de Arquímedes: } E &= m_{\text{ai}} g = \rho_{\text{ai}} \cdot V \cdot g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{ai}} g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{\text{ai}} \cdot V \cdot g &= 6 \pi r \eta \frac{s}{t} + \rho_{\text{ai}} \cdot V \cdot g \therefore \\ \therefore (\rho_{\text{ac}} - \rho_{\text{ai}}) V g &= 6 \pi r \eta \frac{s}{t} \therefore \\ \therefore (\rho_{\text{ac}} - \rho_{\text{ai}}) \frac{4}{3} \pi r^3 g &= 6 \pi r \eta \frac{s}{t} \therefore \end{aligned}$$

$$r = \left[\frac{9 \eta s}{2 (\rho_{\text{ac}} - \rho_{\text{ai}}) g t} \right]^{1/2}$$

* Cuando establecemos una diferencia de potencial, $V_A - V_C$, entre las placas del condensador, aparece un campo eléctrico, \vec{E}_{elec} , entre ellas que va de la placa anódica positiva a la cátodica negativa, como consecuencia aparece una fuerza electrostática, \vec{F}_e , sobre la gota con carga q positiva. Puesto que la gota está quieta, volvemos a efectuar un balance de fuerzas $\Rightarrow \vec{v} = 0$ (reposo) $\Rightarrow \vec{a} = 0 \Rightarrow \Sigma \vec{F} = 0$:



$$\vec{P} = \vec{F}_R + \vec{F}_e \therefore P - E = F_e = q |\vec{E}_{\text{elec}}| = q \cdot \frac{V_A - V_C}{d}$$

Combinando ambos balances de fuerzas:

$$\begin{aligned} P - E &= F_R \quad | \quad F_e = F_R \therefore \\ P - E &= F_e \quad | \\ \therefore 6 \pi r \eta \frac{s}{t} &= q \cdot E_{\text{elec}} \Rightarrow \text{Sustituyendo} \end{aligned}$$

en esta ecuación la expresión calculada para el radio de la gota, r , y despejando q : $q \cdot E_{elec} = 6\pi \left[\frac{q \eta s}{2(\rho_{ac} - \rho_{ai}) g t} \right]^{1/2} \cdot \eta \cdot \frac{s}{t}$

$$\therefore q = \frac{18\pi}{E_{elec}} \left[\frac{(\eta s)^3}{2(\rho_{ac} - \rho_{ai}) g t^3} \right]^{1/2} \quad \therefore \quad q = \frac{9\pi}{E_{elec}} \left[\left(\frac{\eta s}{t} \right)^3 \cdot \frac{2}{(\rho_{ac} - \rho_{ai}) g} \right]^{1/2} \quad \text{Metemos}$$

en esta expresión los datos en el S.I.:

$$q = \frac{9\pi}{8,784 \cdot 10^3} \left[\left(\frac{1,80 \cdot 10^{-5} \cdot 0,001}{40,2} \right)^3 \cdot \frac{2}{(824 - 1,29) \cdot 9,8} \right]^{1/2} = 4,8 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Teniendo en cuenta el valor absoluto de la carga del electrón

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \Rightarrow q = +n e \quad \therefore n = \frac{q}{e} = \frac{4,8 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 3 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad q_{gota} = +3 \text{ electrones}$$

Por último decir que la carga de la gota de aceite es positiva pues se le han arrancado previamente electrones, por ejemplo bombardeándola con rayos X.