El 26 de noviembre de 2011 fue lanzada a Marte la sonda espacial Curiosity a bordo de un cohete Atlas V541 (AV-028) desde la rampa de lanzamiento SLC-41 de la base aérea de Cabo Cañaveral. Al día siguiente, una cadena televisiva anunció el evento entre sus noticias del mediodía, confirmando que llegaría al planeta rojo en junio de 2012.

a) Demuestre que los periodistas erraron en su información.

b) Calcule el ángulo que debe haber entre los radios vectores que unen el Sol con la Tierra y el Sol con Marte en el momento del lanzamiento.

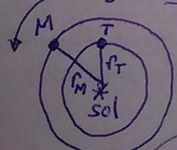
c) ¿Qué velocidad se debe adicionar a la nave recién salida de la Tierra para que siga su camino elíptico hasta Marte?

d) En su encuentro con Marte, ¿la nave debe frenar o acelerar? ¿Cuánto?

Datos: distancia Tierra-Sol = 149 600 000 km; año marciano = 1,8822 años;
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N m^2 kg^{-2}$; masa del Sol = $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg.

Solución:

a) * ¿DÓNDE ESTÁ MARTE? ¿r_M? $\Rightarrow$ 3ª Ley de Kepler: $\begin{cases} T_M^2 = cte \cdot r_M^3 \\ T_T^2 = cte \cdot r_T^3 \end{cases}$ dividiendo ambas ecuaciones miembro a miembro $\Rightarrow$



Suponemos órbitas circulares para la Tierra (T) y Marte (M) $\Rightarrow \left(\frac{T_M}{T_T}\right)^2 = \frac{r_M^3}{r_T^3} \therefore r_M = r_T\left(\frac{T_M}{T_T}\right)^{2/3}$

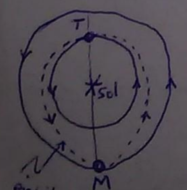
distancia Tierra-Sol = r_T = 149 600 000 km = 1 UA (unidad astronómica)

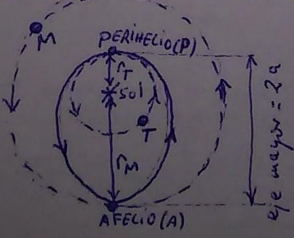
(período de revolución de Marte alrededor del Sol) = (año marciano) = T_M = 1,8822 años (terrestres)

período de revolución de la Tierra alrededor del Sol = T_T = 1 año.

$$r_M = 1\,UA\left(\frac{1{,}8822 \text{ años}}{1 \text{ año}}\right)^{2/3} \therefore \underline{r_M = 1{,}524\ UA}$$

* ¿POR DÓNDE IR? ¿CUÁNTO SE TARDA? ¿T_H? Iremos inyectando nuestra nave en una órbita elíptica de Hohmann. Es una órbita de transferencia entre las órbitas circulares de la Tierra y Marte. Se cumple la 3ª Ley de Kepler utilizando como distancia el semieje mayor, a, de la órbita de transferencia:





$$2a = r_T + r_M \Rightarrow a = \frac{r_T + r_M}{2} = \frac{1\,UA + 1{,}524\,UA}{2} = \underline{1{,}262\,UA}$$

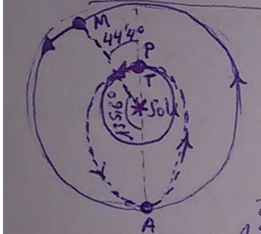
T_H = período de revolución de la nave en la órbita de Hohmann.

$\left.\begin{array}{l} T_H^2 = cte\cdot a^3 \\ T_T^2 = cte\cdot r_T^3 \end{array}\right\}$ dividiendo miembro a miembro $\dfrac{T_H^2}{T_T^2} = \dfrac{a^3}{r_T^3}$ ∴ $T_H = T_T\left(\dfrac{a}{r_T}\right)^{3/2} = 1\,\text{año}\cdot\left(\dfrac{1,262\,UA}{1\,UA}\right)^{3/2} = \underline{1,418\ \text{años}}$

Como nuestra nave será lanzada desde la Tierra en el perihelio (punto P) y se encontrará con Marte en el afelio (punto A), recorrerá la mitad de la órbita de Hohmann y por lo tanto tardaremos la mitad de su período en llegar a Marte: $\dfrac{T_H}{2} = \dfrac{1,418\,\text{años}}{2} = 0,709$ años. En meses: $0,709\ \text{años} \times 12\ \dfrac{\text{meses}}{\text{año}} =$ $\boxed{\text{8,5 meses se tarda en llegar a Marte}}$

Según los periodistas la nave iba a tardar, de noviembre a junio, poco más de 7 meses, luego se equivocaron pues se tarda ocho meses y medio. (de hecho llegó el 6 de agosto de 2012, 254 días de viaje ≃ 0,7 años)

• b) ¿CUÁNDO EFECTUAMOS EL LANZAMIENTO? Como Marte está más alejado del Sol que la Tierra, se mueve más lento en su órbita y hemos de efectuar el lanzamiento cuando esté adelantado un cierto ángulo respecto a la Tierra para que la nave y Marte se encuentren en el punto A.



encuentro de la nave con Marte. El radio vector que une Marte con el Sol barre un ángulo de 360° (una revolución completa) en $T_M = 1,8822$ años, luego en el tiempo de viaje 8,5 meses = 0,709 años:

$\left.\begin{array}{l} 1,8822\ \text{años} \ \text{———}\ 360° \\ 0,709\ \text{años} \ \text{———}\ \alpha \end{array}\right\}$ $\alpha = 360°\cdot\dfrac{0,709\ \text{años}}{1,8822\ \text{años}} = 135,6°$

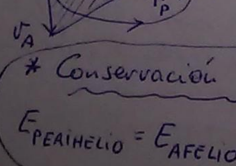
$\boxed{\text{LANZAREMOS CUANDO MARTE ESTÉ ADELANTADO RESPECTO DE LA TIERRA } 180° - 135,6° = 44,4°}$

• c) La nave será lanzada desde la Tierra y, por lo tanto, inicialmente llevará la velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol, que es:

$$v_{orb_T} = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}} = \frac{2\pi r_T}{T_T} = \frac{2\pi\cdot 149\,600\,000\ \text{km}}{365\ \text{días}\cdot 24\frac{h}{\text{día}}\cdot 3600\ \frac{s}{h}} = \underline{29,81\ \text{km/s}}$$

Para calcular la velocidad con la que hay que impulsar la nave, en perihelio, para que tome nuestra elipse de Hohmann utilizamos:

* 2ª Ley de Kepler (ley de las áreas):



$$v_{AREOLAR} = \frac{1}{2} r_A v_A = \frac{1}{2} r_p v_p \ ∴\ v_A = \frac{r_p v_p}{r_A}$$

* Conservación de la energía: E = cte = energía mecánica en cualquier punto de nuestro viaje elíptico.

$E_{PERIHELIO} = E_{AFELIO}$; $E = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{energía cinética}} - \underbrace{\frac{G M m}{r}}_{\text{energía potencial}}$ ∴ $\frac{1}{2}\cancel{m} v_p^2 - \frac{G\cancel{m}M}{r_p} = \frac{1}{2}\cancel{m} v_A^2 - \frac{G\cancel{m}M}{r_A}$ ∴

∴ $v_p^2 - v_A^2 = 2GM\left(\dfrac{1}{r_p} - \dfrac{1}{r_A}\right)$ ∴ $v_p^2 - \dfrac{r_p^2 v_p^2}{r_A^2} = 2GM\left(\dfrac{1}{r_p} - \dfrac{1}{r_A}\right)$ ∴

$$\therefore v_P^2\left(1-\frac{r_P^2}{r_A^2}\right)=2GM\left(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_A}\right)=2GM\,\frac{r_A-r_P}{r_A r_P}\;\therefore$$

$$\therefore v_P^2\,\frac{r_A^2-r_P^2}{r_A^{\cancel{2}}}=2GM\,\frac{r_A-r_P}{\cancel{r_A}\,r_P}\;\therefore\; v_P^2\,\frac{(r_A+r_P)\cancel{(r_A-r_P)}}{r_A}=\frac{2GM}{r_P}\cancel{(r_A-r_P)}\;\therefore$$

$$\therefore v_P^2=\frac{2GM}{r_P\cdot\frac{r_A+r_P}{r_A}}\;\therefore\; v_P=\sqrt{\frac{2GM}{r_P\left(1+\frac{r_P}{r_A}\right)}}$$

$M=M_{sol}=1{,}99\cdot10^{30}\,kg$

$G=6{,}67\cdot10^{-11}\,N\,m^2\,kg^{-2}$

$r_P=r_T=1\,U.A=149\,600\,000\,km=$
$=1{,}496\cdot10^{11}\,m$

$r_A=r_M=1{,}524\,UA$

$$v_P=\sqrt{\frac{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}99\cdot10^{30}}{1\cdot1{,}496\cdot10^{11}\left(1+\frac{1\,UA}{1{,}524\,UA}\right)}}=32733\,m/s=\underline{32{,}73\,km/s}$$

* ¿QUÉ VELOCIDAD DEBEMOS ADICIONAR A LA NAVE PARA QUE SIGA LA ELIPSE DE HOHMANN? : $\underbrace{32{,}73\,km/s}_{\text{velocidad en perihelio}}-\underbrace{29'81\,km/s}_{\text{velocidad orbital de la Tierra}}=\underline{2{,}9\,km/s}$ ↑ 10% de $v_{ORBITAL}$ ¡sólo!

• d) ¿LLEGADA A MARTE: ¿NOS ADELANTA O TENEMOS QUE FRENAR?

*La velocidad orbital de Marte alrededor del Sol:

$$v_{ORB_M}=\frac{espacio}{tiempo}=\frac{2\pi r_M}{T_M}=\frac{2\pi\cdot1{,}524\,UA\cdot149\,600\,000\,km/UA}{1{,}8822\,\cancel{años}\cdot365\,\frac{\cancel{días}}{\cancel{año}}\cdot24\frac{h}{\cancel{día}}\cdot3600\frac{s}{h}}=24{,}13\,\frac{km}{s}$$

* Velocidad en el afelio de nuestra nave, cuando llega a Marte:

2ª Ley de Kepler: $v_{AREOLAR}=\frac{1}{2}v_A r_A=\frac{1}{2}v_P r_P\;\therefore\; v_A=v_P\,\frac{r_P}{r_A}=32{,}73\,\frac{km}{s}\cdot\frac{1\,UA}{1{,}524\,UA}\;\therefore$

$\therefore v_A=21{,}48\,\frac{km}{s}$

$\underline{v_{orb_M}=24{,}13\,km/s>v_A=21{,}48\,\frac{km}{s}}\Rightarrow$ Marte va más rápido cuando nos encontramos con él por lo que hay que generar un impulso en la nave para igualar velocidades $\Rightarrow 24{,}13-21{,}48=\boxed{2{,}65\,\frac{km}{s}}$ hemos de adicionar