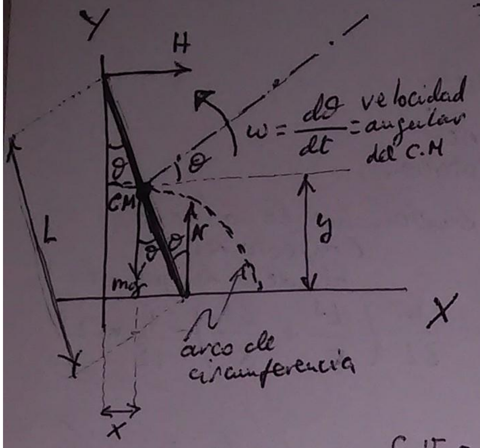
BASTÓN DE LA ABUELA. (NEWTON)



* Coordenadas de posición del centro de masas del bastón (C.M):

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta \\ y &= \frac{L}{2}\cos\theta \end{aligned}\right\} x^2+y^2 = \frac{L^2}{4}\cancel{(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}^{1} = \frac{L^2}{4}$$

$$\Downarrow$$

El centro de masas del bastón describe un arco de circunferencia mientras esté en contacto, en su caída, con la pared vertical.

* Velocidad del C.M

$$\left\{\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{L}{2}\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2}\,\omega\cos\theta \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\theta}{dt} = -\frac{L}{2}\,\omega\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\} \therefore$$

$$\therefore v^2 = v_x^2+v_y^2 = \frac{L^2}{4}\,\omega^2\,\underbrace{(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}_{1} \quad \therefore \quad v = \frac{L}{2}\,\omega$$

* Aceleración del C.M:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{L}{2}\left(-\omega\operatorname{sen}\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} + \cos\theta\cdot\frac{d\omega}{dt}\right) = \frac{L}{2}\left(\cos\theta\,\frac{d\omega}{dt} - \omega^2\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{L}{2}\left(\omega\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt} + \operatorname{sen}\theta\,\frac{d\omega}{dt}\right) = -\frac{L}{2}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\omega}{dt} + \omega^2\cos\theta\right)$$

* Ecuaciones del movimiento del C.M (2ª Ley Newton: $\sum\vec{F} = m\vec{a}$):

En X: $H = m\,a_x$ ⟶ Sustituyendo la expresión para a_x llegamos a:

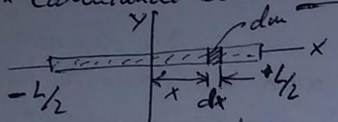
En Y: $N - mg = m\,a_y$ } $H = m\,\frac{L}{2}\left(\cos\theta\,\frac{d\omega}{dt} - \omega^2\operatorname{sen}\theta\right)$, luego es posible que $H = 0$, cuando $\cos\theta\,\frac{d\omega}{dt} = \omega^2\operatorname{sen}\theta$, en ese caso $a_x = 0$ y $v_x = cte.$ a partir de este momento. Es decir, cuando la parte superior del bastón se desprenda de la pared vertical, la velocidad horizontal de su centro de masas permanecerá constante y, puesto que no hay rozamientos, coincidirá con la velocidad con la que termina deslizando sobre el suelo horizontal, ya que, a partir del momento de desprendimiento de la pared vertical, no hay fuerzas horizontales que puedan modificar v_x.

* Haciendo un balance de energía entre el instante inicial y un

instante t en el que el bastón de la abuela todavía mantiene contacto con la pared vertical:

$$\underbrace{mg\frac{L}{2}}_{\text{E. potencial inicial}} = \underbrace{mgy}_{\text{E. potencial en t}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{cinética de translación}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{\text{cinética de rotación}}$$

* Calculando el momento de inercia I del bastón de la abuela: (respecto del C.M alrededor del que rota)



$$I = \int x^2\,dm = \lambda\int_{-L/2}^{L/2} x^2\,dx = \frac{m}{3L}\left(\frac{L^3}{8}+\frac{L^3}{8}\right) = \frac{1}{12}mL^2$$

densidad lineal $= \lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{m}{x} = cte$ (bastón homogéneo)

* Sustituyendo en la ecuación de conservación de la energía las expresiones deducidas para y, v e I:

$$\cancel{m}g\frac{\cancel{L}}{\cancel{2}} = \cancel{m}g\frac{\cancel{L}}{\cancel{2}}\cos\theta + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}\frac{L^{\cancel{2}}}{4}\omega^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{12}\cancel{m}L^{\cancel{2}}\omega^2 \therefore$$

$\therefore\ g(1-\cos\theta) = \frac{4}{3\cdot 4}L\omega^2 \therefore \boxed{\omega^2 = \frac{3g}{L}(1-\cos\theta)}$. Derivamos la última ecuación respecto del tiempo: $2\cancel{\omega}\frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{L}\operatorname{sen}\theta\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\cancel{\omega}} \therefore$

$\therefore \boxed{\frac{d\omega}{dt} = \frac{3g}{2L}\operatorname{sen}\theta}$. Ya hemos visto que en el momento del desprendimiento $H=0$ y entonces $\cos\theta\frac{d\omega}{dt} = \omega^2\operatorname{sen}\theta$, sustituimos para ese instante las expresiones recuadradas:

$$\cos\theta\cdot\frac{3g}{2L}\cancel{\operatorname{sen}\theta} = \omega^2\cancel{\operatorname{sen}\theta} \qquad \cos\theta\cdot\underbrace{\frac{\cancel{3g}}{2\cancel{L}}\operatorname{sen}\theta}_{d\omega/dt} = \underbrace{\frac{\cancel{3g}}{\cancel{L}}(1-\cos\theta)}_{\omega^2}\cancel{\operatorname{sen}\theta} \therefore$$

$\therefore \frac{\cos\theta}{2} = 1-\cos\theta \therefore \frac{3}{2}\cos\theta = 1 \therefore$ por lo tanto, en el instante del desprendimiento del bastón: $\cos\theta = \frac{2}{3}$, y la velocidad angular ω en dicho instante valdrá: $\omega^2 = \frac{3g}{L}\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{\cancel{3}g}{L}\cdot\frac{1}{\cancel{3}} = \frac{g}{L} \therefore$

$\therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Entonces la velocidad horizontal (componente x) en dicho instante será: $v_x = \frac{L}{2}\omega\cos\theta = \frac{L}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{g}{L}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3} = \sqrt{\frac{L^{\cancel{2}}g}{\cancel{L}}}\cdot\frac{1}{3}$

$\therefore \boxed{v_x = \frac{1}{3}\sqrt{gL}}$ que coincidirá con la velocidad terminal del bastón de la abuela deslizando sin rozamiento sobre el suelo horizontal del cuarto de estar.