OLIMPIADA FÍSICA

Al pasar un cazador por un punto del terreno, se levanta una perdiz que allí reposaba y, emprende el vuelo en movimiento rectilíneo. El cazador dispara y el ave es herida 4 s después del disparo y cae desde 5 m de altura sobre el terreno, que es horizontal. Se supone que la trayectoria del proyectil es parabólica y se ha observado que ambas trayectorias se han cortado ortogonalmente.

Se pide:

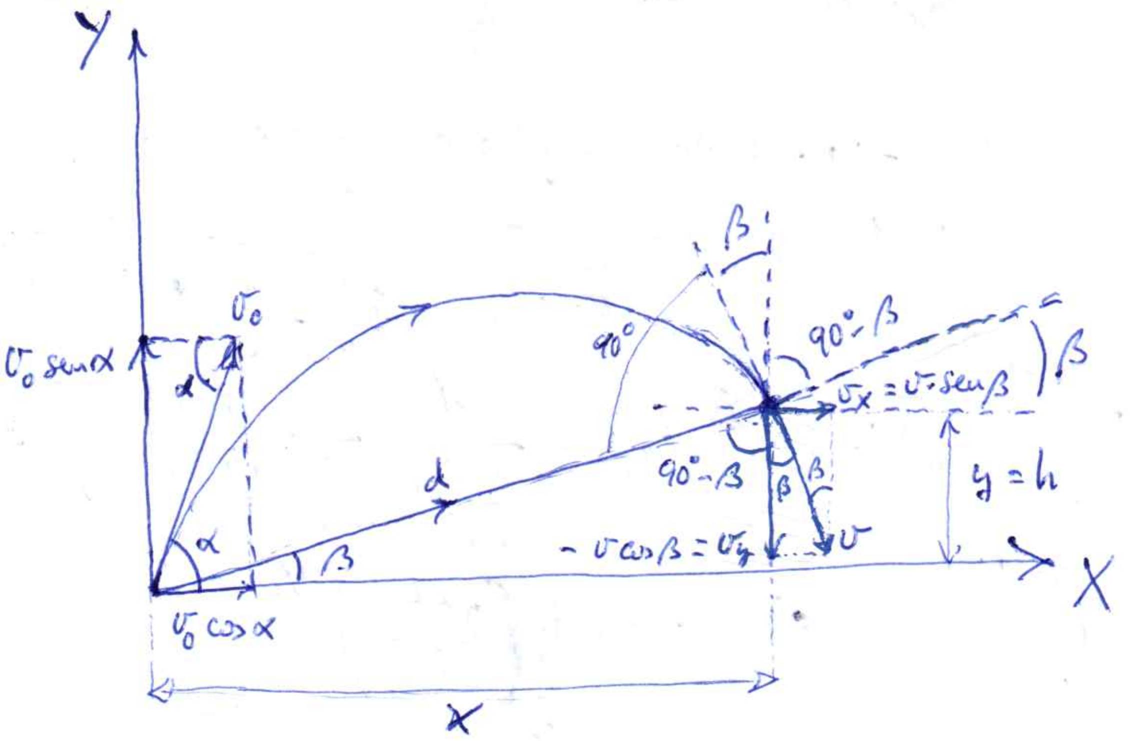
a) El ángulo β de la trayectoria del ave con el suelo.

b) La longitud total recorrida por el ave en su vuelo.

c) El ángulo α con la horizontal con que se ha disparado la escopeta.

d) La velocidad inicial del proyectil.

Solución:



$v_0 \rightarrow$ velocidad inicial de la bala disparada

$v \rightarrow$ velocidad final de la bala, cuando impacta con el ave.

a) * <u>Analizamos velocidad y posición del disparo en Y:</u>

$\boxed{y = h = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \quad [1]}$ Siendo $t = 4s$, $y = h = 5m$

$\boxed{v_y = v_{0y} - g t = v_0 \operatorname{sen} \alpha - g t \quad [1']}$

Por otro lado, de la figura se deduce: $v_y = -v \cos\beta$ $\Rightarrow$ $v_{0y} - g t = -v \cos\beta$ ∴

∴ $\boxed{v_{0y} = g t - v \cos\beta \quad [2]}$

Sustituyendo [2] en [1]:

$$h = (g t - v \cos\beta) t - \frac{1}{2} g t^2 = g t^2 - v \cos\beta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{g t^2}{2} - v\cos\beta \cdot t ∴$$

$$∴ v \cos\beta \; t = \frac{g t^2}{2} - h \; ∴ \; v \cos\beta = \frac{g t^{\cancel{2}}}{2\cancel{t}} - \frac{h}{t} \; ∴ \boxed{v \cos\beta = \frac{g t}{2} - \frac{h}{t} \quad [3]}$$

* <u>Analizamos velocidad y posición del disparo en X:</u>

$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha = cte \Rightarrow \boxed{x = v_x \cdot t = v_0 \cos\alpha \cdot t \quad [4]}$ $\Rightarrow v \operatorname{sen}\beta \cancel{t} = v_0 \cos\alpha \cancel{t}$ ∴

Por otro lado, de la figura se deduce $\Rightarrow v_x = v \operatorname{sen}\beta \Rightarrow \boxed{x = v_x \cdot t = v \operatorname{sen}\beta \cdot t \quad [5]}$

∴ $\boxed{v \operatorname{sen}\beta = v_0 \cos\alpha \quad [6]}$. De la figura se deduce $tg\beta = \frac{y}{x} = \frac{h}{x}$ ∴

∴ $x = \frac{h}{tg\beta}$ [7] Sustituyendo [7] en [5]: $\frac{h}{tg\beta} = v \operatorname{sen}\beta \cdot t$ ∴

∴ $\boxed{v \cdot \operatorname{sen}\beta = \frac{h}{t \cdot tg\beta} \quad [8]}$ Dividiendo miembro a miembro [8] entre [3] se llega a:

$$\frac{\cancel{v} \operatorname{sen}\beta}{\cancel{v} \cos\beta} = \frac{\frac{h}{t \cdot tg\beta}}{\frac{g t}{2} - \frac{h}{t}} = \frac{h}{t \cdot \left(\frac{g t}{2} - \frac{h}{t}\right) tg\beta} ∴$$

$$∴ \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = tg\beta = \frac{h}{\left(\frac{g t^2}{2} - h\right) tg\beta} \Rightarrow \boxed{tg^2\beta = \frac{1}{\frac{1}{h}\left(\frac{g t^2}{2} - h\right)} = \left(\frac{g t^2}{2h} - 1\right)^{-1} \quad [9]} ∴$$

$$∴ \boxed{tg\beta = \left(\frac{g t^2}{2h} - 1\right)^{-1/2} \quad [10]} \Rightarrow \beta = arc\,tg\left(\frac{g t^2}{2h} - 1\right)^{-1/2} =$$

$$= arc\,tg\left(\frac{9{,}8\,m/s^2 \cdot 4^2 s^2}{2 \cdot 5\,m} - 1\right)^{-1/2} = \underline{14{,}62775699^\circ} ∴$$

a) $\boxed{\beta = 14{,}6^\circ}$

• b) Mirando la figura aplicamos el teorema de Pitágoras:

$x^2+y^2=d^2 \rightarrow x^2+h^2=d^2$ [11]. Sustituyendo [7] en [11] $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{h^2}{tg^2\beta}+h^2=d^2$ [12]. Sustituyendo [9] en [12] $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{\left(\frac{gt^2}{2h}-1\right)^{-1}}+h^2=d^2 \therefore d^2=h^2\left(\frac{gt^2}{2h}-1\right)+h^2=h^2\left(\frac{gt^2}{2h}\cancel{-1}\cancel{+1}\right) \therefore$$

$$\therefore d^2=\cancel{h^2}\frac{gt^2}{2\cancel{h}} \therefore \boxed{d^2=\frac{gt^2h}{2}\ [13]} \therefore \boxed{d=\sqrt{\frac{gh}{2}}\cdot t \ [14]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d=\sqrt{\frac{9{,}8\frac{m}{\cancel{s^2}}\cdot 5m}{2}}\cdot 4\cancel{s}=19{,}79898987\ m$$

• b) $\boxed{d=19{,}8\ m}$

c) Dividimos entre t la ecuación [1] y despejamos v_{0y} $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{h}{t}=\frac{v_{0y}\cancel{t}}{\cancel{t}}-\frac{gt^{\cancel{2}}}{2\cancel{t}} \therefore \boxed{v_{0y}=v_0 \operatorname{sen}\alpha=\frac{h}{t}+\frac{gt}{2}\ [15]}$$

De la ecuación [4] $\Rightarrow v_0\cos\alpha=\frac{x}{t}$. Sustituimos [7] en [4] $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{v_0\cos\alpha=\frac{h}{t\cdot tg\beta}\ [16]}$ • Dividiendo [15] entre [16] miembro a miembro: $\frac{\cancel{v_0}\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{v_0}\cos\alpha}=tg\alpha=\frac{\frac{gt}{2}+\frac{h}{t}}{\frac{h}{t\cdot tg\beta}}=$

$$=t\cdot tg\beta\left(\frac{gt}{2h}+\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}t}\right)=tg\beta\cdot\left(\frac{gt^2}{2h}+1\right)\ (17)$$

Sustituyendo [10] en [17]: $tg\alpha=\left(\frac{gt^2}{2h}-1\right)^{-1/2}\left(\frac{gt^2}{2h}+1\right) \therefore$

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{\frac{gt^2}{2h}+1}{\sqrt{\frac{gt^2}{2h}-1}}} \quad [18] \Rightarrow \alpha = arc\,tg\left(\frac{\frac{9{,}8\,\cancel{m}/\cancel{s^2}\cdot 4^2\,\cancel{s^2}}{2\cdot 5\,\cancel{m}}+1}{\sqrt{\frac{9{,}8\,\cancel{m}/\cancel{s^2}\cdot 4^2\cdot \cancel{s^2}}{2\cdot 5\,\cancel{m}}-1}}\right) = 77{,}06338937°$$

• c) $\boxed{\alpha = 77{,}1°}$

• d) De la ecuación [16] despejamos la velocidad inicial del proyectil, v_0:

$$v_0 = \frac{h}{t\cdot tg\beta\cdot \cos\alpha} = \frac{5\,m}{4s\cdot tg\,14{,}62725699°\cdot \cos 77{,}06338937°} = 21{,}3929895\,\frac{m}{s}$$

$$\therefore \boxed{v_0 = 21{,}393\,\frac{m}{s}}$$