PROBLEMA INFERNAL.

Un hombre parte del origen de coordenadas con una velocidad inicial constante de 2 m/s y va sobre el eje OY. Otro hombre está situado a 27 m sobre el eje OX y va a una velocidad inicial constante de 3 m/s persiguiendo al otro hombre. Se pide:

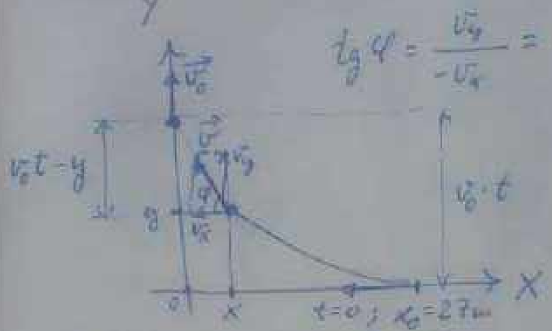
a) Ecuación de la trayectoria del segundo hombre.

b) Punto del eje Y en el que se encuentran.

• **Solución:**

$v_0 = 2\ m/s = cte$

$|\vec{v}| = v = 3\ m/s = cte.$



$$tg\,\varphi = \frac{v_y}{-v_x} = \frac{v_0 t - y}{x} \therefore x v_y = v_x (y - v_0 t) \therefore$$

$$\therefore \boxed{y = v_0 t + \frac{v_y}{v_x} x \quad [1]}$$

Derivamos [1] respecto de t:

$$\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y} = v_0 \underbrace{\frac{dt}{dt}}_{1} + \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} \cdot \frac{v_y}{v_x} + x \frac{d}{dt}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \therefore$$

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \therefore v_y = \sqrt{v^2 - v_x^2}$

$$\therefore \cancel{v_y} = v_0 + \cancel{v_x \frac{v_y}{v_x}} + x \frac{d}{dt}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \therefore \quad 0 = v_0 + x \frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{v^2 - v_x^2}}{v_x}\right) \therefore$$

$$\therefore 0 = v_0 + x \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{v^2 - v_x^2}{v_x^2}}\right) = v_0 + x \frac{d}{dt}\left[\sqrt{\left(\frac{v}{v_x}\right)^2 - 1}\right] = v_0 + x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\left(\frac{v}{v_x}\right)\left(-\frac{v}{v_x^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{v}{v_x}\right)^2 - 1}} \cdot \frac{dv_x}{dt}$$

$$-v_0 = x \cdot \frac{(-v^2)}{v_x^2 \left(v_x \sqrt{\frac{v^2}{v_x^2} - 1}\right)} \cdot \frac{dv_x}{dt}\ ; v_0 = x \cdot \frac{v^2}{v_x^2 \sqrt{v^2 - v_x^2}} \cdot \frac{dv_x}{dt}$$

Multiplicamos y dividimos la derivada por dx: $\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} = v_x \frac{dv_x}{dx}$

$$\therefore v_0 = x \cdot \frac{v^2}{v_x^2 \sqrt{v^2 - v_x^2}} \cdot v_x \frac{dv_x}{dx}.$$ Separamos variables e integramos:

$$v_0 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = v^2 \int \frac{dv_x}{v_x \sqrt{v^2 - v_x^2}} \quad \boxed{v_0 \ln \frac{x}{x_0} = v^2 \int \frac{dv_x}{v_x \sqrt{v^2 - v_x^2}}\ ; [2]}$$

Resolvemos la integral de [2] con el siguiente cambio de variable:

②

$u = \frac{1}{v_x} \rightsquigarrow du = -\frac{1}{v_x^2}\, dv_x$; $\int \frac{dv_x}{v_x\sqrt{v^2-v_x^2}} = -\int \frac{v_x^2\, du}{v_x\sqrt{v^2-v_x^2}}$

$$= -\int \frac{du}{\frac{\sqrt{v^2-v_x^2}}{v_x}} = -\int \frac{du}{\sqrt{\frac{v^2-v_x^2}{v_x^2}}} = -\int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{v}{v_x}\right)^2-1}} = -\int \frac{du}{\sqrt{(v\cdot u)^2-1}}$$

La integral se resiste, hacemos un segundo cambio de variable: $v u = \frac{1}{\cos\theta} \rightsquigarrow v\, du = +\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$

$$-\int \frac{du}{\sqrt{(v u)^2-1}} = -\frac{1}{v}\int \frac{\operatorname{sen}\theta \cdot d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}} = -\frac{1}{v}\int \frac{\operatorname{sen}\theta \cdot d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}} =$$

$$= -\frac{1}{v}\int \frac{\operatorname{sen}\theta \cdot d\theta}{\cos^2\theta\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}} = -\frac{1}{v}\int \frac{\operatorname{sen}\theta \cdot d\theta}{\cos^2\theta\, \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = -\frac{1}{v}\int \frac{d\theta}{\cos\theta} =$$

$$= -\frac{1}{v}\int \sec\theta\, d\theta \;=$$

Para calcular la integral de la secante, multiplicamos y dividimos por la suma de la secante y la tangente:

$$= -\frac{1}{v}\int \frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{\sec\theta+\tan\theta}\, d\theta = -\frac{1}{v}\int \frac{\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\cdot d\theta$$

Teniendo en cuenta la derivada de la secante y de la tangente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}(\sec\theta) &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) = +\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} = \sec\theta\cdot\tan\theta \\ \frac{d}{d\theta}(\tan\theta) &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right) = \frac{\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta \end{aligned}\right\} \therefore$$

Hacemos un tercer cambio de variable:

$\therefore q = \sec\theta + \tan\theta \rightsquigarrow dq = (\sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta)\cdot d\theta$

$$-\frac{1}{v}\int \frac{\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}\cdot d\theta = -\frac{1}{v}\int \frac{dq}{q} =$$

$$= -\frac{1}{v}\ln q + cte = -\frac{1}{v}\ln(\sec\theta+\tan\theta) + cte = -\frac{1}{v}\ln\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right) + cte =$$

Deshacemos todos los cambios de variable:

$$= -\frac{1}{v}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}\right) + cte = -\frac{1}{v}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{(v\cdot u)^2}}}{\frac{1}{v\cdot u}}\right) + cte =$$

$$= -\frac{1}{v}\ln\left(v\cdot u + \sqrt{(v\cdot u)^2 - 1}\right) + cte = -\frac{1}{v}\ln\left(\frac{v}{v_x} + \sqrt{\frac{v^2}{v_x^2} - 1}\right) + cte =$$

$$= -\frac{1}{v}\ln\left(\frac{v + v_x\sqrt{\frac{v^2}{v_x^2} - 1}}{v_x}\right) + cte = -\frac{1}{v}\ln\left(\frac{v+\sqrt{v^2 - v_x^2}}{v_x}\right) + cte$$

Sustituimos el resultado en [2]:

$$v_0 \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = v^2\left(-\frac{1}{v}\right)\cdot\ln\left(\frac{v+\sqrt{v^2-v_x^2}}{v_x}\right) + cte$$

Realmente deberíamos escribir los argumentos de los logaritmos en valor absoluto (el logaritmo de un negativo no existe).

$$v_0 \ln\left|\frac{x}{x_0}\right| = -v\cdot\ln\left|\frac{v+\sqrt{v^2-v_x^2}}{v_x}\right| + cte$$

En el primer argumento no hay problema porque $x_0, x > 0$; pero en el segundo sí ya que $v_x < 0$ en todo momento, por lo tanto, ponemos $-v_x > 0$ en vez de $v_x < 0$.

$$v_0 \ln\frac{x}{x_0} = -v\cdot\ln\frac{v+\sqrt{v^2-v_x^2}}{(-v_x)} + cte$$

[redacted] Calculamos la constante de integración teniendo en cuenta las condiciones iniciales:

$t=0 \Rightarrow x = x_0;\ v_x = -v \therefore v_0\cdot\underbrace{\ln\frac{x_0}{x_0}}_{\ln 1 = 0} = -v\cdot\underbrace{\ln\frac{v+\sqrt{v^2-(-v)^2}}{-(-v)}}_{\ln 1 = 0} + cte \Rightarrow \underline{cte = 0}$

Luego la ecuación queda: $-\frac{v_0}{v}\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \ln\frac{v+\sqrt{v^2-v_x^2}}{(-v_x)} \therefore$

$$\therefore \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}} = \ln\frac{v+\sqrt{v^2-v_x^2}}{-v_x} \therefore$$

-④-

∴ $\boxed{v_y = +\sqrt{v^2 - v_x^2} = -v_x \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}} - v \qquad [3]}$

• Notemos que $0 \le x < x_0 \Rightarrow \frac{x}{x_0} < 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}} = \frac{1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{v_0}{v}}} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -v_x \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}} > (-v_x) \ge v > 0 \Rightarrow -v_x \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}} - v \ge 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{v_y \ge 0}}$ (como era de esperar).

Para despejar v_x de [3] elevamos ambos miembros al cuadrado:

$$\underbrace{v^2 - v_x^2}_{\Leftarrow\, v \ge v_x} = \left[-v_x \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}} - v\right]^2 \;\therefore$$

(¡ojo! el 2º miembro $[\;]^2 \ge 0$, luego hay que poner v^2 delante de v_x^2 en la resta para que dé positivo)

$$\therefore\; v^2 - v_x^2 = (-v_x)^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{2v_0}{v}} - 2v(-v_x)\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}} + v^2$$

$$* \quad v_x^2 + v_x^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{2v_0}{v}} + 2 v_x v \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}} = 0$$

$$\underbrace{\left\{v_x\left[1 + \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{2v_0}{v}}\right] + 2v\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}}\right\}}_{=0} \cdot \underset{\neq 0}{v_x} = 0$$

$$-v_x\left[1 + \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{2v_0}{v}}\right] = 2v\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}} \;\therefore\; v_x = -\frac{2v\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}}}{\left[1 + \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{2v_0}{v}}\right]} =$$

$$= \frac{-2v}{\dfrac{1 + \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{2v_0}{v}}}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}}}} = \frac{-2v}{\left(\frac{x_0}{x}\right)^{-\frac{v_0}{v}} + \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}}}$$

$$\therefore\; \boxed{v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{2v}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{v_0}{v}} + \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}}} \qquad [4]}$$

Separamos variable e integramos la ecuación [4]

$$-2v\int_0^t dt = \int\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{v_0}{v}} + \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}}\right]dx$$

Hacemos un nuevo cambio de variable: $z = \frac{x}{x_0} \rightsquigarrow dz = \frac{dx}{x_0}$ ∴

$$\therefore -2vt = x_0\int\left(z^{\frac{v_0}{v}} + z^{-\frac{v_0}{v}}\right)dz = x_0\left(\frac{z^{1+\frac{v_0}{v}}}{1+\frac{v_0}{v}} + \frac{z^{1-\frac{v_0}{v}}}{1-\frac{v_0}{v}}\right) + cte. \therefore$$

$$\therefore t = -\frac{x_0}{2v}\cdot v\left(\frac{z^{1+\frac{v_0}{v}}}{v+v_0} + \frac{z^{1-\frac{v_0}{v}}}{v-v_0}\right) + cte.$$

Calculamos la constante de integración con las condiciones iniciales: $t = 0 \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow z = \frac{x_0}{x_0} = 1$ ∴

$$\therefore 0 = -\frac{x_0}{2}\left(\frac{1}{v+v_0} + \frac{1}{v-v_0}\right) + cte. \Rightarrow cte = \frac{x_0}{2}\left(\frac{1}{v+v_0} + \frac{1}{v-v_0}\right) \therefore$$

$$\therefore cte = \frac{x_0}{2}\cdot\frac{v - \cancel{v_0} + v + \cancel{v_0}}{(v+v_0)(v-v_0)} = \frac{x_0}{2}\cdot\frac{2v}{v^2 - v_0^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{x_0}{2}\left[-\frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{1+\frac{v_0}{v}}}{v+v_0} - \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{1-\frac{v_0}{v}}}{v-v_0} + \frac{2v}{v^2-v_0^2}\right] \quad [5]}$$

Para encontrar la ecuación de la trayectoria usaremos la ecuación [1]: $y = v_0 t + \left(\frac{v_y}{v_x}\right)\cdot x$ en la cual sustituiremos la ecuación [5] en t, calculando además el factor $\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$ con la ecuación [3]: $v_y = -v_x\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}} - v$ ∴

$$\left.\begin{aligned} &\therefore v_y = -v_x z^{-\frac{v_0}{v}} - v \therefore \frac{v_y}{v_x} = -z^{-\frac{v_0}{v}} - \left(\frac{v}{v_x}\right) \\ &[4] \rightsquigarrow \frac{v}{v_x} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{v_0}{v}} + \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\frac{v_0}{v}}\right] = -\frac{1}{2}\left(z^{\frac{v_0}{v}} + z^{-\frac{v_0}{v}}\right) \end{aligned}\right\} \therefore$$

$$\therefore \frac{v_y}{v_x} = -z^{-\frac{v_0}{v}} + \frac{1}{2} z^{\frac{v_0}{v}} + \frac{1}{2} z^{-\frac{v_0}{v}} = \frac{1}{2} z^{\frac{v_0}{v}} - \frac{1}{2} z^{-\frac{v_0}{v}}$$

$$\therefore \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{2} z^{\frac{v_0}{v}} - \frac{1}{2} z^{-\frac{v_0}{v}} \; ; \quad \boxed{\frac{v_y}{v_x} = \frac{z^{\frac{v_0}{v}} - z^{-\frac{v_0}{v}}}{2} \qquad [6]}$$

Sustituimos [5] y [6] en [1]:

$$y = v_0 t + \left(\frac{v_y}{v_x}\right) \cdot x = \frac{v_0 x_0}{2}\left(- \frac{z^{1+\frac{v_0}{v}}}{v+v_0} - \frac{z^{1-\frac{v_0}{v}}}{v-v_0} + \frac{2v}{v^2-v_0^2}\right) + \frac{z^{\frac{v_0}{v}} - z^{-\frac{v_0}{v}}}{2} \cdot z \cdot x_0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{x}{x_0} \cdot x_0 = z \cdot x_0$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x_0} = -\frac{1}{2} \frac{z^{1+\frac{v_0}{v}}}{\frac{v+v_0}{v_0}} - \frac{1}{2} \frac{z^{1-\frac{v_0}{v}}}{\frac{v-v_0}{v_0}} + \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2} v v_0}{v^2-v_0^2} + \frac{1}{2} z^{1+\frac{v_0}{v}} - \frac{1}{2} z^{1-\frac{v_0}{v}} =$$

$$= \frac{z^{1+\frac{v_0}{v}}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\frac{v+v_0}{v_0}}\right) - \frac{z^{1-\frac{v_0}{v}}}{2}\left(1 + \frac{1}{\frac{v-v_0}{v_0}}\right) + \frac{v \cdot v_0}{v^2 - v_0^2} =$$

$$= \frac{z^{1+\frac{v_0}{v}}}{2}\left(\frac{v + \cancel{v_0} - \cancel{v_0}}{v+v_0}\right) - \frac{z^{1-\frac{v_0}{v}}}{2}\left(\frac{v - \cancel{v_0} + \cancel{v_0}}{v-v_0}\right) + \frac{\cancel{v} \cdot v_0 / v^{\cancel{2}}}{\frac{v^2 - v_0^2}{v^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{1+\frac{v_0}{v}}}{\frac{v+v_0}{v}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{1-\frac{v_0}{v}}}{\frac{v-v_0}{v}} + \frac{v_0/v}{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}$$

Finalmente nos queda como ecuación de la trayectoria:

$$\boxed{y = x_0 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{1+\frac{v_0}{v}}}{1+\frac{v_0}{v}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{1-\frac{v_0}{v}}}{1-\frac{v_0}{v}} + \frac{v_0/v}{1-\left(\frac{v_0}{v}\right)^2} \right] \qquad [7]}$$

• a) Sustituimos datos en [7]: $x_0 = 27\,m$; $v_0 = 2\,m/s$; $v = 3\,m/s$

$$y = 27\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{x}{27}\right)^{1+\frac{2}{3}}}{1+\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{x}{27}\right)^{1-\frac{2}{3}}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{2/3}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right] =$$

$$= 27\left[\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x}{27}\right)^{5/3}}{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{x}{27}\right)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + \frac{2/3}{1-\frac{4}{9}}\right] =$$

$$= 27\left[\frac{3}{10}\left(\frac{x}{27}\right)^{5/3} - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{27}\right)^{1/3} + \frac{2/3}{\frac{5}{3\cdot 3}}\right] \therefore$$

$$\therefore y = 27\left[\frac{3\,x^{5/3}}{10\cdot 243} - \frac{3}{2\cdot 3}x^{1/3} + \frac{3\cdot 2}{5}\right]$$

$$\boxed{y = \frac{x^{5/3}}{30} - \frac{27}{2}x^{1/3} + \frac{162}{5}}$$

• b) Encuentro $\Rightarrow x = 0 \therefore$ $\boxed{y = \frac{162}{5}\,m = 32{,}4\,m}$