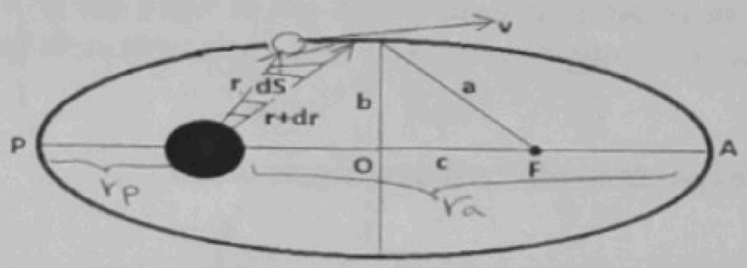
Para la resolución de este problema es necesario realizar un recorrido sobre los tópicos matemáticos y físicos del movimiento de un cuerpo sometido al campo gravitatorio de otro, cuya masa es muchísimo mayor que el del cuerpo en movimiento.

<u>Consideraciones geométricas</u>



Es sabido que cuando un cuerpo se mueve sometido al campo gravitatorio de otro cuerpo mucho más masivo que el primero, la trayectoria de éste es una elipse en la que el cuerpo "atractor" (en este caso la Tierra) ocupa uno de sus focos. Como se observa en la figura, y recordando la definición de elipse (*curva cerrada y plana, tal que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos a dos puntos fijos, denominados focos, es constante e igual a la longitud del eje mayor*) **b** es el semieje menor y **a** el semieje mayor; se define **excentricidad e** de la elipse:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow b = a\sqrt{1 - e^2}$$

Obviamente el valor de la excentricidad de una elipse está acotado por $0 < e < 1$.

En la trayectoria elíptica de un satélite alrededor de la Tierra se define el **perigeo** como el punto de la trayectoria en el que los dos cuerpos se encuentran más cerca, y **ageo** en el que se encuentran más lejos, que coinciden con los extremos del eje mayor, y se encuentran a las distancias r_P y r_A de la Tierra, de tal forma que se verifica $2a = r_A + r_P$ (1).

Se pueden deducir fácilmente las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} 1 - e = \frac{r_P}{a} \\ 1 + e = \frac{r_A}{a} \\ \frac{r_P}{r_A} = \frac{1-e}{1+e} \\ e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P} \\ b = \sqrt{r_A\, r_P} \quad (3) \end{cases}$$

Consideraciones físicas

La ecuación diferencial del movimiento de un cuerpo de masa m sometido al campo gravitatorio de un cuerpo de masa M (m <<< M) es $-\frac{G\,M\,m}{r^3}\,\vec{r} = m\,\frac{d^2\,\vec{r}}{d\,t^2}$, cuya resolución (el denominado *problema de Kepler*) lleva a la siguiente ecuación:

$$e^2 - 1 = \frac{2\,{}^{E}\!/_{m}\,\left({}^{L}\!/_{m}\right)^2}{G^2\,M^2} \qquad (2)$$

E es la energía mecánica, L el momento angular del cuerpo de masa m y e la excentricidad de la órbita.

También puede llegarse a la siguiente igualdad, a veces denominada *3ª ley de Kepler,* que relaciona el período orbital T con el semieje mayor de la elipse.

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2\,a^3}{G\,M} \qquad (5)$$

El vector *Momento Angular* del cuerpo de masa m respecto del foco donde está el cuerpo de masa M se define de la forma $\vec{L} = \vec{r}\;x\;m\,\vec{v}$,, $L = r\;mv\;sen\;\alpha$, donde el ángulo α es el que forman los vectores de posición de m $\vec{r}$ y $\vec{v}$, la velocidad del cuerpo m Dado que la fuerza de la gravedad es una *fuerza central*, el Momento Angular del cuerpo de masa M respecto del foco ocupado por el cuerpo de masa M es **constante** (recuérdese el teorema del Momento Angular: $\frac{d\,\vec{L}}{dt} = \vec{r}\;x\;\vec{F}$), y por tanto lo sería obviamente su módulo. Si consideramos en el dibujo el elemento de superficie "barrido" por el vector **r** en dt, para el área dS del triángulo definido por r y (r+dr), recordando la interpretación geométrica del módulo del producto vectorial de dos vectores se cumpliría lo siguiente:

$$dS = |\vec{r}\;x\;d\vec{r}| = \frac{1}{2}\,\frac{|\vec{r}\;x\;d\vec{r}|}{m}\,\frac{m}{dt}\,dt \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m}\left|\vec{r}\;x\;m\,\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{L}{2m} = cte$$

, que es la demostración de la segunda ley de Kepler o *ley de las áreas*, donde dS/dt es la denominada *velocidad areolar*. Como el área de una elipse viene dada por la expresión S= πab, podría escribirse que dS/dt= πab/T, y finalmente:

$$\frac{L}{m} = \frac{2\pi ab}{T} \qquad (4)$$

Para ir concluyendo este apartado teórico, si en la expresión (2) sustituimos e^2 por $1 - b^2/a^2$, y (L/m) por la expresión (4) y T por la expresión (5), se llegaría a la expresión:

$$-\frac{1}{a} = \frac{2}{GM}\,\frac{E}{m} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{a} = \frac{2}{GM}\left(\frac{1}{2}\,v^2 - \frac{GM}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad (6)$$

Ya disponemos de todo el repertorio teórico para resolver el problema:

En primer lugar calculamos $\frac{L}{m} = r\;v\;sen\;\alpha = 15000x10^3\;x\;5600x\;sen\;72^o = 7{,}99x10^{10}\;{}^{m^2}\!/_{s}$.

En la ecuación (6) sustituyendo los valores de la velocidad v y la distancia r, obtendríamos que el semieje mayor **a= 1,83x10^7 m**, y si se sustituye este valor en la ecuación (5) se obtendría el valor del periodo orbital **T= 2,46x10^4 s = 6 h 50 min**.

En la ecuación (4) sustituyendo los valores anteriormente calculados para (L/m), a y T se obtendría el valor del semieje menor de la elipse **b= 1,71x10^7 m**. Con los valores calculados de los semiejes podrían calcularse los valores de las distancias del perigeo y del ageo mediante las ecuaciones (1) y (3): **r_A = 2,48x10^7 m ,,, r_P = 1,18x10^7 m.**

Si estos valores del ageo y del perigeo se sustituyen en la ecuación (6) se obtendrían los valores de las velocidades en estos puntos: **v_A= 3,22 km/s ,,, v_P= 6,77 km/s.**

Sin temor a equivocarse, este problema es ciertamente muy complejo, demasiado para el foro donde se ha propuesto.