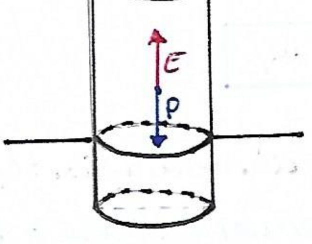
2. Un corcho de forma cilíndrica, de 10 cm^2 de base y 3 cm de altura, flota en agua ya que su densidad es 3 veces menor que la del líquido y se encuentra en su posición de equilibrio. Determínese, despreciando la fricción con el líquido:

a) El trabajo realizado para hundir el corcho hasta que su base superior coincida con la superficie del líquido, permaneciendo vertical su generatriz. **(0,8 ptos.)**

b) La ecuación del movimiento que realiza el corcho cuando se deja suelto desde la posición anterior. **(0,7 ptos.)**

Castilla y León 2018.T5.F2

$S = 10^{-3}\ m^2 \quad h = 3 \cdot 10^{-2}\ m \quad d_c = \frac{d_L}{3} \quad d_L = 10^3\ Kg/m^3 \quad \Big|\ d_c = \frac{10^3}{3}\ Kg/m^3$



a) $W = ?$

Calculamos primero la altura sumergida cuando el corcho está flotando en equilibrio:

Sobre el corcho actúan 2 fuerzas: el peso y el empuje del líquido, cuyos valores son:

$$P = m_c \cdot g = V_c \cdot d_c\, g = S \cdot h\, d_c\, g = \cancel{10^{-3}} \cdot \cancel{3} \cdot 10^{-2} \cdot \frac{\cancel{10^3}}{\cancel{3}} \cdot 9{,}8 = 0{,}098\ N$$

$$E = m_{liq\,des} \cdot g = V_{cs} \cdot d_L\, g = S \cdot h_s\, d_L \cdot g = \cancel{10^{-3}}\, h_s \cdot \cancel{10^3} \cdot 9{,}8 = 9{,}8\, h_s\ N$$

② (Continuación)

En el equilibrio: $\vec{E} + \vec{P} = 0$; $E - P = 0$; $E = P$.

$$9{,}8\,h_S = 0{,}098 \longrightarrow h_S = 0{,}01\ m.$$

y la altura emergida será: $h_E = h - h_S = 0{,}03 - 0{,}01 = 0{,}02\ m.$

- El trabajo realizado sobre el corcho es igual a la energía potencial que posee cuando está sumergido, que viene medida por el trabajo realizado al introducir el corcho dentro del líquido.

Como la fuerza que hay que hacer depende del empuje y este varía a medida que vamos introduciendo el corcho, no podemos podemos considerarla constante. Tomaremos un elemento diferencial de altura, dx, a una altura x de la superficie del líquido, en el que podemos suponer que el empuje es constante y calcularemos un dW. Después integramos para obtener el trabajo total como suma de todos los trabajos elementales:

$$dW = F\,dx = (E-P)\,dx = (Sxd_Lg - Shd_cg)dx = (Sx\,3d_cg - Shd_cg)dx$$

$$dW = Sd_cg\,(3x-h)\,dx$$

$$W = \int_{h_S}^{h} Sd_cg\,(3x-h)\,dx = Sd_cg\left[\int_{h_S}^{h} 3x\,dx - \int_{h_S}^{h} h\,dx\right] = Sd_cg\left(\left[\frac{3x^2}{2}\right]_{h_S}^{h} - \left[hx\right]_{h_S}^{h}\right)$$

$$W = Sd_cg\left[\left(\frac{3h^2}{2} - \frac{3h_S^2}{2}\right) - \left(h^2 - hh_S\right)\right] = Sd_cg\left(\frac{3}{2}(h^2 - h_S^2) - h^2 + hh_S\right)$$

$$\boxed{W = 10^{-3}\,\frac{10^3}{3}\,9{,}8\left[\frac{3}{2}(0{,}03)^2 - 10^{-4}) - 0{,}03^2 + 0{,}03\cdot 10^{-2}\right] = 1{,}96\cdot 10^{-3}\ J}$$

b) ¿Ecuación del movimiento?

La fuerza productora del movimiento cuando el corcho está totalmente sumergido es el exceso de empuje con respecto al del equilibrio del corcho cuando estaba flotando. Si consideramos una posición en el que el cuerpo está introducido una longitud x, esa fuerza es:

$F = -Sxd_Lg$ → el signo − indica que el desplazamiento es hacia abajo y la fuerza hacia arriba.

que es del tipo: $F = -Kx$ que produce un movimiento vibratorio armónico.

Comparando ambas fuerzas: $K = m\omega^2 = Sd_Lg$ donde:

$\omega^2 = \dfrac{Sd_Lg}{m}$ siendo m la masa del corcho: $m = Shd_c = Sh\dfrac{d_L}{3}$

por tanto: $\omega^2 = \dfrac{Sd_Lg}{Sh\frac{d_L}{3}} = \dfrac{3g}{h} \rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{3g}{h}} = \sqrt{\dfrac{3\cdot 9{,}8}{3\cdot 10^{-2}}} = 31{,}30\ s^{-1}$

② (Continuación)

Si tomamos la función sen para describir el movimiento vibratorio armónico, la ecuación general sería: $y = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0)$

Teniendo en cuenta que el corcho está totalmente sumergido cuando empieza el movimiento: $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ y la amplitud del movimiento es $A = 2 \cdot 10^{-2}$ m.

La ecuación del movimiento será entonces:

$$\boxed{y = 2 \cdot 10^{-2} \operatorname{sen}(31{,}30 t + 3\pi/2) \text{ m.}}$$