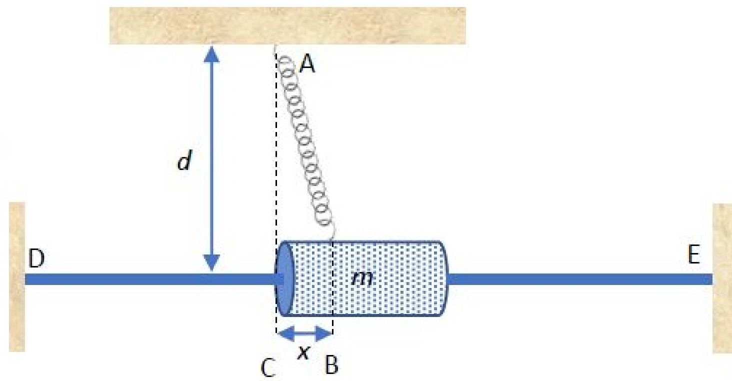
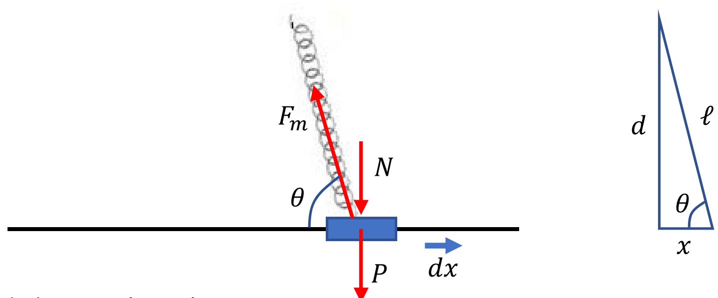
En la figura el resorte ideal es de constante k y de longitud natural l_0; el punto A es fijo, la distancia AC es $d > l_0$ y el cuerpo B de masa m puede moverse sin rozamiento a lo largo de la varilla horizontal DE.

a) Dejamos el cuerpo en libertad a partir del reposo en el punto B a una distancia x = a de C; determinar la velocidad de m cuando pasa por C. (0,6 puntos)

b) Demostrar que el movimiento para pequeños desplazamientos es armónico simple y obtener su frecuencia. (0,65 puntos)





a)

① Teorema de la energía cinética

$$\Sigma W_{1\to 2} = Ec_2 - Ec_1$$

$$W_{F_m} + W_N + W_P = Ec_2 - Ec_1$$

$$W_{F_m} + 0 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \to W_{F_m} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$W_{F_m} = -\int F_m \cdot cos\theta \cdot dx = -\int K\Delta\ell \cdot cos\theta \cdot dx = -\int K(\ell - \ell_o)\cdot\frac{x}{\ell}dx = -K\int\left(1-\frac{\ell_o}{\ell}\right)xdx$$

$$W_{F_m} = -K\int\left(1-\frac{\ell_o}{\sqrt{x^2+d^2}}\right)xdx = -K\int xdx + K\ell_o\int\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}\,dx$$

$$W_{F_m} = -K\int_a^0 xdx + K\ell_o\int_a^0\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}\,dx = K\frac{a^2}{2} + K\ell_o\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+d^2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_a^0 = K\frac{a^2}{2} + K\ell_o\left(d-\sqrt{a^2+d^2}\right)$$

$$W_{F_m} = K\left(\frac{a^2}{2} + \ell_o d - \ell_o\sqrt{a^2+d^2}\right)$$

$$K\left(\frac{a^2}{2} + \ell_o d - \ell_o\sqrt{a^2+d^2}\right) = \frac{1}{2}mv^2 \to v = \sqrt{\frac{K}{m}\left(a^2 + 2\ell_o d - 2\ell_o\sqrt{a^2+d^2}\right)}$$

② Segunda ley de Newton

$\Sigma F_x = ma$

$-F_m\, cos\theta = ma \rightarrow -K\Delta\ell\, cos\theta = ma \rightarrow -K\Delta\ell\, cos\theta = m\dfrac{vdv}{dx} \rightarrow -\dfrac{K}{m}\Delta\ell\, cos\theta dx = vdv$

$-\dfrac{K}{m}(\ell - \ell_o)\cdot\dfrac{x}{\ell}dx = vdv \rightarrow -\dfrac{K}{m}\displaystyle\int_a^0 \left(1 - \dfrac{\ell_o}{\ell}\right)xdx = \int_0^v vdv \ldots$

b)

$\Sigma F_x = ma$

$-F_m\, cos\theta = m\ddot{x} \rightarrow -K\Delta\ell\, cos\theta = m\ddot{x} \rightarrow -K(\ell - \ell_o)\dfrac{x}{\ell} = m\ddot{x} \rightarrow -K\left(1 - \dfrac{\ell_o}{\ell}\right)x = m\ddot{x}$

$-K\left(1 - \dfrac{\ell_o}{\sqrt{x^2 + d^2}}\right)x = m\ddot{x}$

Para pequeños desplazamientos $x \ll d$

$-K\left(1 - \dfrac{\ell_o}{d}\right)x = m\ddot{x}$

$-K\left(\dfrac{d - \ell_o}{d}\right)x = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} + \dfrac{K}{m}\left(\dfrac{d - \ell_o}{d}\right)x = 0$

Como $d > \ell_o$, esta ecuación se corresponde con un movimiento armónico simple pues es de la forma:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Identificando:

$\omega^2 = \dfrac{K}{m}\left(\dfrac{d - \ell_o}{d}\right)$

La frecuencia es igual a $f = \frac{\omega}{2\pi}$

$\boxed{f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{K}{m}\left(\dfrac{d - \ell_o}{d}\right)}}$ $[Hz]$