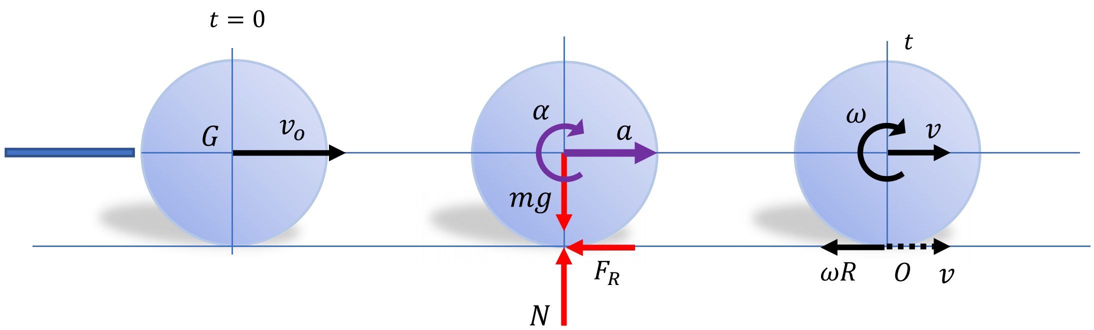
Una bola de billar, de masa m y radio R, se encuentra en reposo sobre una mesa horizontal con la que presenta un coeficiente de rozamiento μ. Se la golpea con un taco, en dirección horizontal que pasa por el centro de la bola, comunicándole una velocidad inicial v_o. Determine la distancia recorrida por la bola antes de empezar a rodar sin deslizar.



Teorema de la energía cinética: $\Sigma W_F = E_{cf} - E_{c0}$ (**1**)

La energía cinética de un sólido rígido es: $E_c = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2$

Siendo O el CIR (centro instantáneo de rotación) $\quad I_O = I_G + mR^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$

Antes de que la esfera ruede sin deslizar la fuerza de rozamiento trabaja, y su valor es $F_R = \mu N$.

$\Sigma F_y = 0 \ \rightarrow N = mg$

$\Sigma F_x = ma_G \ \rightarrow -F_R = ma \rightarrow -\mu N = ma \rightarrow -\mu mg = ma \rightarrow a = -\mu g$

$$\Sigma M_G = I_G\ \alpha \ \rightarrow F_R \cdot R = I_G\ \alpha \rightarrow \mu N\ R = \frac{2}{5}mR^2\ \alpha \rightarrow \mu mg\ R = \frac{2}{5}mR^2\ \alpha \rightarrow \alpha = \frac{5}{2}\frac{g}{R}\mu$$

Según estas dos últimas expresiones de la aceleración lineal y angular, la velocidad del centro de masas de la esfera disminuye y la velocidad angular aumenta.

Al cabo de un cierto tiempo t, la velocidad en el punto de contacto entre la esfera y el suelo (O) se hace cero, y la esfera rueda sin deslizar con velocidad constante.

Aplicando el teorema de la energía cinética (**1**):

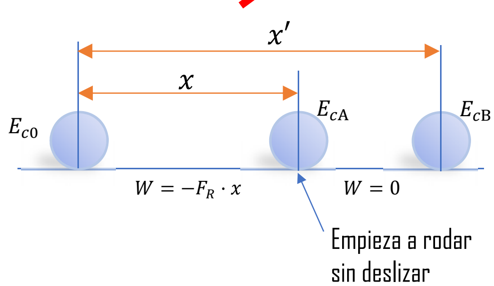
$$-F_R \cdot x = \frac{1}{2}I_O\omega^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 \rightarrow -\mu mgx = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}mR^2\right)\omega^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 \rightarrow -\mu gx = \frac{7}{10}R^2\omega^2 - \frac{1}{2}v_o^2$$

$$v^2 - v_o^2 = 2a\ \Delta x$$

$$\omega^2R^2 - v_o^2 = 2(-\mu g)x \rightarrow \omega^2R^2 = v_o^2 - 2\mu gx$$

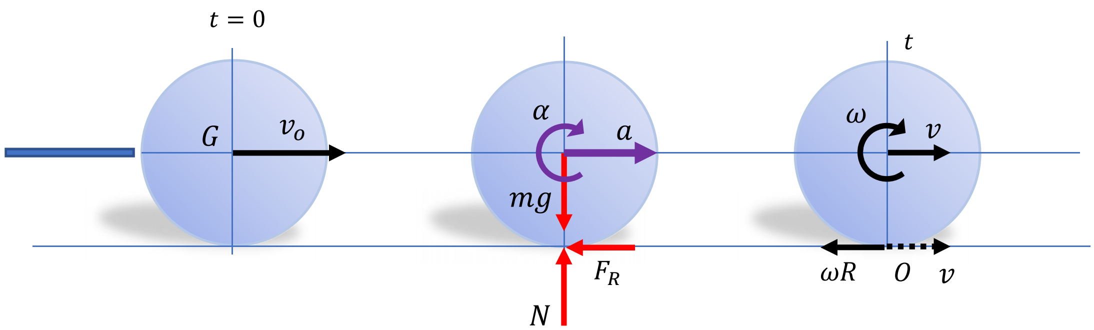
$$-\mu gx = \frac{7}{10}(v_o^2 - 2\mu gx) - \frac{1}{2}v_o^2 \rightarrow \frac{14}{10}\mu gx - \mu gx = \frac{7}{10}v_o^2 - \frac{1}{2}v_o^2 \rightarrow \frac{4}{10}\mu gx = \frac{2}{10}v_o^2 \rightarrow \boxed{\cancel{x = 0{,}5\ \frac{v_o^2}{\mu g}}}$$

Este procedimiento es erróneo porque la variación de energía cinética es la misma tanto si la esfera está a una distancia x como si está a una distancia x'. ($E_{c\text{A}} = E_{c\text{B}}$)



Se obtiene un valor de x pero que no tiene por qué ser en el que la esfera empieza a rodar sin deslizar.

Una bola de billar, de masa m y radio R, se encuentra en reposo sobre una mesa horizontal con la que presenta un coeficiente de rozamiento μ. Se la golpea con un taco, en dirección horizontal que pasa por el centro de la bola, comunicándole una velocidad inicial v_o. Determine la distancia recorrida por la bola antes de empezar a rodar sin deslizar.



$$I_G = \frac{2}{5} mR^2$$

Antes de que la esfera ruede sin deslizar la fuerza de rozamiento trabaja, y su valor es $F_R = \mu N$.

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = mg$$

$$\Sigma F_x = ma_G \rightarrow -F_R = ma \rightarrow -\mu N = ma \rightarrow -\mu mg = ma \rightarrow a = -\mu g$$

$$\Sigma M_G = I_G\, \alpha \rightarrow F_R \cdot R = I_G\, \alpha \rightarrow \mu N\, R = \frac{2}{5} mR^2\, \alpha \rightarrow \mu mg\, R = \frac{2}{5} mR^2\, \alpha \rightarrow \alpha = \frac{5}{2}\frac{g}{R}\mu$$

Según estas dos últimas expresiones de la aceleración lineal y angular, la velocidad del centro de masas de la esfera disminuye y la velocidad angular aumenta.

Al cabo de un cierto tiempo t, la velocidad en el punto de contacto entre la esfera y el suelo (O) se hace cero, y la esfera rueda sin deslizar con velocidad constante.

$$v_G = v_o + at \rightarrow v_G = v_o - \mu g t$$

$$\omega = \omega_o + \alpha t \rightarrow \omega = \frac{5}{2}\frac{g}{R}\mu t$$

$$v_G = \omega R \rightarrow v_o - \mu g t = \frac{5}{2}\frac{g}{R}\mu t \rightarrow t = \frac{2}{7}\frac{v_o}{\mu g}$$

$$v_G = v_o - \mu g \cdot \frac{2}{7}\frac{v_o}{\mu g} \rightarrow v_G = \frac{5}{7} v_o$$

$$v_G^2 - v_o^2 = 2a\, \Delta x$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 v_o^2 - v_o^2 = 2(-\mu g)\, \Delta x \rightarrow \frac{25}{49} v_o^2 - v_o^2 = -2\mu g x \rightarrow -\frac{24}{49} v_o^2 = -2\mu g x \rightarrow \boxed{x = \frac{12}{49}\frac{v_o^2}{\mu g}};\ x = 0{,}245\frac{v_o^2}{\mu g}$$